LA NOCIÓN DE RAZÓN EN LAS MATEMÁTICAS DE LA ESCUELA PRIMARIA

David Block
DIE CINVESTAV
dblock@cinvestav.mx

Octubre 2006

Primera parte

Las razones, precursoras de las fracciones

a) Introducción

b) Procedimientos de alumnos de primaria

c) Dos ejemplos de ingeniería didáctica

Segunda parte

Las razones, precursoras de los operadores naturales

Un ejemplo de ingeniería didáctica

Dos formas de expresar **medidas** fraccionarias

Razones

- Avanza 2 metros en 3 pasos
- El espesor de 100 hojas es 2 cm
- Un pastel para 3 niños

Fracciones

- Pasos de 2/3 de metro
- Hojas de 0.02 cm de espesor
- Porciones de 1/3 de pastel

Dos formas de expresar **operadores multiplicativos** fraccionarios

Razones

2 cm por cada 3 cm,

Por cada 3 vueltas del engrane A, el B da 5 vueltas

Con 3 kg de harina se preparan 4 kg de masa

Fracciones

Factor de escala: 1 ½

El nº de vueltas del engrane **A** es 3/5 del número de vueltas del engrane **B**

La cantidad de masa es 4/3 de la de harina

Hipótesis

El trabajo con razones en la escuela primaria, previo y paralelo al trabajo con fracciones, permite:

- Favorecer el razonamiento proporcional.
- Sentar bases para una mejor comprensión de las fracciones como expresión de medidas, de razones, y de operadores multiplicativos.

Antecedentes

- **Freudenthal**, 1981

  El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño ...

- **Brousseau**, 1981

  Construcción de los racionales a partir de las razones.

- **Vergnaud**, 1988

  Campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

- Trece alumnos de 4º a 6º de primaria
- Formato: resolución de problemas en entrevista individual
- Variables de los problemas:
  - Problemas de valor faltante y de comparación de razones
  - Tipos de magnitud
  - Tipos de razón (entera, no entera)
  - Otras...

En el contexto de medidas

“Una rana avanza 5 varas en 3 saltos, ¿cuántas varas avanza en 12 saltos?”

Dos tipos de procedimiento

Saltos	Varas	
3	5	
1	5/3	x4
12	12 X 5/3	

Saltos	Varas	
3	5	
		x4
12	4 X 5	

Ejemplo 2

En la mesa de Toño hay en total 3 niños. Se reparten un pastel en partes iguales.

En la mesa de Ana hay en total 7 niñas. Se reparten dos pasteles en partes iguales.

¿A quién le toca más pastel, a Toño o a Ana?

Toño: 1/3

Ana: 2/7

1/3 vs 2/7

1 p : 3 n = 2p : 6n

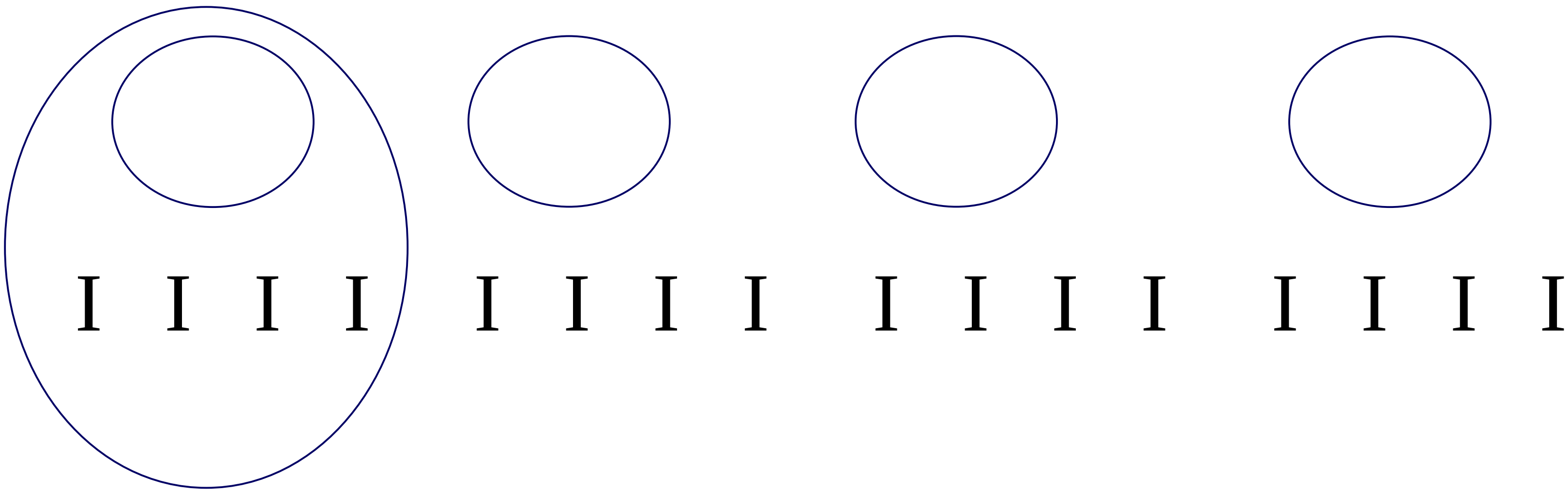
2p : 6 n > 2p : 7 n

Ejemplo 3

Repartos simplificables:

Se reparten 4 pasteles entre 16 niños.

¿Cuánto toca a cada uno?



... es lo mismo que 1 pastel entre 4 niños

En el contexto de operadores

"Varios niños deciden trabajar en las huertas cercanas a sus casas…

- *En la huerta "Sonora" les ofrecen:* *<u>Por cada 3 naranjas que recojan, se quedan con 2.</u>*
- *En la huerta "Vista Hermosa" les ofrecen:* *<u>Por cada 10 naranjas que recojan, se quedan con 9.</u>*

¿Cuál de los dos tratos les conviene más?"

- Primer ejemplo: uso de razones.

Sonora	
3	2
6	4
...	...
21	**14**

Vista Hermosa	
10	9
20	**18**

- Segundo ejemplo: emergencia incipiente de las fracciones, en tanto expresiones de razones.

Problema:

"de cada **5** naranjas, **2** naranjas"

"de cada **20** naranjas, **6** naranjas"

Mar: Ah... creo que estoy descubriendo un tip... se trata de que aquí... si recogen 5, se quedan con 2 (...), se quedan con casi la mitad,

y los otros, recogen 20 y se quedan con 6, pero están recogiendo más naranjas, por eso les dan más,

pero aquí (20, 6) no les están dando algo que se parezca a la mitad, 7 u 8 naranjas. Por eso aquí es más justo (en 5, 2).

Casi 1/2

5	2
20	7 u 8

20	6

Mar: Aquí (5, 2), si recogen 10 naranjas, si pensamos ***en la segunda vuelta****, recogen 10 naranjas, se quedan con 4 y allí ya no es la mitad.*

¿Casi ½ de?

5	2
10	4
n5	n2

E: ¿cuál es la mitad de 10?

Mar: 5, ah..., no... (rectifica), a mí se me hace que les conviene más el de 5 y les dan 2, porque siempre les están dando casi la mitad de las naranjas, y en el otro les dan más naranjas, pero no les dan casi la mitad.

(Itera 5 veces el par 20, 6)

Mar: (...) "30 y 30, 60, (y 30) 90, <u>serían tercios</u> (...) Entonces aquí le está dando casi la mitad y aquí un tercio (...)

Casi ½ de

5	2
20	7 u 8

1/3 de

20	6
100	30

(5, 2) = (20, 8) ≈ "casi 1/2 de"

(20, 6) = (100, 30) ≈(90, 30) ≈ "1/3 de"

Comentarios:

- Los alumnos de sexto grado han avanzado poco en el proceso de utilizar fracciones con el sentido de razones, o de operadores multiplicativos.

- Sin embargo, logran utilizar razones de enteros y sus propiedades para resolver problemas;

- Las fracciones más simples, 1/2 y 1/3, emergen con el sentido de expresiones de conjuntos de razones equivalentes, es decir,

  como expresiones de aquello que es constante cuando las cantidades varían.

Algunas Consecuencias...

Importante distinguir:

“Por cada 5 naranjas, te doy 2”

Las razones como **precursoras** de las fracciones

“Te doy 2/5 de las naranjas”

Las fracciones jugando el papel de razones u operadores multiplicativos

El trabajo con **razones**, **previo a las fracciones** permite utilizar la intuición y desarrollar el pensamiento proporcional...

antes de sumergirse en el mundo complejo del cálculo con fracciones.

Conviene **APLAZAR** la definición típica de las razones que dice:

"Las razones son fracciones o cocientes"

Las razones son primero **relaciones**

Se pueden expresar con dos números naturales:

- "De cada 100 productos, 30 productos están defectuosos"
- "3 cm por cada 5 cm"
- "A razón de 2 chicles por un peso".

Es necesario estudiar más los procesos didácticos que pueden favorecer la articulación de las razones de enteros con las fracciones y decimales,

es decir, las formas de favorecer el paso de expresiones como "**por cada 5, 2**", a expresiones del tipo

"2/5 de", "40%", X 0.4

1. De las razones a las medidas fraccionarias.
   » El espesor de las hojas de papel

2. De las razones a los operadores fraccionarios
   » Agrandamiento de un rompecabezas

1. De las razones a las medidas.

- El espesor de las hojas de papel (G Brousseau)

La situación:

Solicitar a otro, por escrito, hojas de determinado espesor.

Se tienen instrumentos para medir, en particular verniers.

La estrategia:

- 50 hojas, 4 mm
- Comparaciones: (50, 4) > (30, 4)
- Equivalencia: (50, 4) = (25, 2)
- Suma, resta: (50, 4) + (50, 2) = (50, 6)
- Las medidas no enteras se logran expresar mediante **razones de números naturales**

El paso de la razón a la fracción:

"*A* tiene un espesor de 2/25 de mm" significa que…

- Un montón de 25 hojas *A* tiene un espesor de 2 mm,
- El espesor de una hoja es de 2 mm entre 25 (fracción cociente)

El paso es complejo, se intenta favorecer mediante un uso de los nuevos objetos en tanto números: se comparan, se suman, se restan.

Ventajas:

- Se enfrenta a los alumnos a la insuficiencia de N para medir; ellos mismos ponen en marcha un recurso: las razones de números enteros;
- Construcción de fracciones no centrada en las fracciones unitarias;
- Definición de fracción como cociente desde un principio.

Dificultades :

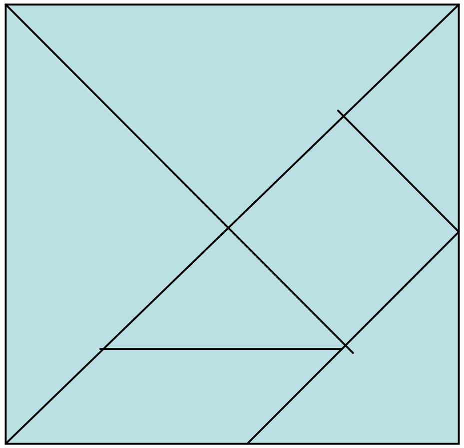
- Dificultad del paso de razón a número;
- Dificultad del paso hacia la interpretación clásica de fracción como partes de unidad (a/b como suma de 1/b, a veces).

2. De las razones a los operadores

- Agrandamiento de un rompecabezas (G. Brousseau)

La situación:

Reproducir un rompecabezas de manera que el lado que mide 4 cm mida 7 cm.



La estrategia

- Primero, aditiva:

  No existe n tal que 4 X n = 7,

  Pero sí tal que 4 + n = 7,

  Entonces 4cm→7cm; 5cm→8cm, 6cm→9cm etc.

La figura se deforma, las piezas no embonan.

- Después, valor unitario:

	A	A’	
	4	7	
(:4)	1	7/4	(:4)
(X5)	5	5 X 7/4	(X5)

La fracción 7/4 aparece como una medida, como un término de una *razón*:

(4, 7) = (1, 7/4) = (5, 35/4) ...

No aparece todavía como el operador X7/4

Por ahora, los operadores fraccionarios se expresan y se manipulan mediante *razones*, por ejemplo:

Se quiere la imagen de 1.25 cm dada por la escala 1→ 0.6 cm (1.25 X 0.6):

	A	A’
	1	0.6
X25	25	25 x 0.6 = 15
:100	0.25	0.15
	1.25	0.75

- El paso de la razones al operador multiplicativo

  X0.25 es …

  la relación que a 1 hace corresponder 0.25

X4

1	4

X0.25

1	0.25

Ventajas de esta construcción

- Destaca la insuficiencia de los operadores naturales (4 X? = 7)
- Destaca la improcedencia del operador aditivo (4 **+ *3*** = 7)
- Moviliza conocimientos en principio disponibles para los alumnos: manipular razones equivalentes, en particular (1, 7/4).

- Favorece la construcción de un significado adecuado para el operador racional: X0.25 significa 1→0.25

- Asume la existencia de una ruptura fuerte de sentido entre la multiplicación por naturales y la multiplicación por números racionales no enteros.

- La proporcionalidad constituye el andamiaje de la construcción. Los alumnos aprenden fracciones y proporcionalidad.

Dificultades:

Para los alumnos,

- Establecer el valor unitario como la estrategia alternativa a lo aditivo no es sencillo,
- Requiere de dominio previo considerable de multiplicaciones y divisiones de números no enteros por números enteros.
- El operador X0.25, definido como la aplicación 1→0.25, no es inmediatamente operativo.

Para el maestro,

- Secuencia larga y conceptualmente compleja.

Comentarios

- Las secuencias anteriores son todavía demasiado complejas como para proponerse como alternativas para el aula.

- Es necesario seguir estudiando alternativas curriculares que permitan una mejor integración del estudio de los racionales con el de la proporcionalidad en beneficio de un mejor aprendizaje de cada uno de esos conceptos.

Razones “múltiplo”

Cuando la cantidad ***a*** es múltiplo de la cantidad ***b***, el valor de la razón (***a, b***) se puede expresar con un número entero:

$$\boldsymbol{a : b = n \text{ veces}}$$

En este caso la razón puede jugar el papel de <u>precursora del operador multiplicativo natural ***n veces***.</u>

Secuencia didáctica "Los intercambios"

- Van a recibir todos una misma cantidad de fichas y las van a cambiar por estampas
- Deben escoger una regla de cambio, ANTES de recibir la fichas

A) Se cambia cada ficha por 4 estampas
B) Se cambian cada 2 fichas por 6 estampas
C) Se cambian cada 4 fichas por 8 estampas
D) Se cambian cada 8 fichas por 24 estampas

- Ganan los que obtienen más estampas después del cambio.
- Cuando ya escogieron la regla, se dice la cantidad de fichas que van a recibir: deben calcular las estampas que les corresponden (primer momento de verificación).
- Se anotan en el pizarrón las reglas escogidas y las cantidades calculadas.
- Finalmente, se les dan las fichas y se organizan los intercambios (segundo momento de verificación).

$\Rightarrow$ La situación exige **comparar razones**.

Propósitos

- Propiciar el paso de la comparación de cantidades a la comparación de razones entre cantidades.
- Propiciar el desarrollo de procedimientos para comparar razones
  - desde la obtención de **parejas equivalentes** mediante la suma de términos
  - hasta la **expresión de la razón externa** mediante un operador o "número de veces"

Condiciones de la experimentación

- Tercer grado; 24 alumnos; escuela pública vespertina del D.F.
- Conducción por maestra con experiencia.
- Tres observadores.
- Seis aplicaciones de la situación en cinco sesiones de una hora.

Procedimientos de los alumnos para comparar las reglas

1. Centramiento en la cantidad de **estampas**
(1ª aplicación: todos los alumnos)

*Beth, “Porque con la **D** ganamos muchas más estampas”*

A) 1 ficha → 4 estampas

B) 2 fichas → 6 estampas

C) 4 fichas → 8 estampas

D) 8 fichas → 24 estampas

2. Centramiento en la cantidad de Fichas (A partir de la 2ª aplicación)

A) 1 ficha → 4 estampas

B) 2 fichas → 6 estampas

C) 4 fichas → 8 estampas

D) 8 fichas → 24 estampas

*Ismael, "La **A**, es la **A**" (...) porque en la **A** <u>no se acaban rápido las fichas</u>,*

3. Consideración cualitativa de la razón

Desde la 2ª aplicación, cada vez más alumnos

Manuel: en ésta (B) <u>por sólo</u> dos fichas nos dan seis!

A) 1 ficha → 4 estampas

B) 2 fichas → 6 estampas

C) 4 fichas → 8 estampas

D) 8 fichas → 24 estampas

4. Verificación previa: aplican dos o tres reglas a una cantidad hipotética de fichas. (desde la segunda aplicación, cuando hay diferencias de opinión)

A) 1 ficha → 4 estampas

B) 2 fichas → 6 estampas

C) 4 fichas → 8 estampas

D) 8 fichas → 24 estampas

Si nos dieran 8 fichas…

A: 8→ 32
B: 8→ 24
C: 8 → 16
D: 8→ 24

Dificultad: la cantidad debe ser múltiplo…

- **Cuarta aplicación**: en todos los equipos hay alumnos que logran escoger y verificar la mejor regla

- **Sexta aplicación**: aparecen formas de verificación más independientes de las cantidades fichas "que les podrían dar", por ejemplo:
  - igualan la cantidad de estampas, no de fichas,

$$(2f \rightarrow 10e) \text{ vs } (10f \rightarrow 20e)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(4f \rightarrow 20e) \text{ vs } (10f \rightarrow 20e)$$

Procedimientos para aplicar las reglas a una cantidad de fichas

2 fichas → 10 estampas

12 fichas → x estampas

2 f → 10e

6   6

12 f → x

Número de grupos de 2 fichas

Número de grupos de 10 estampas

- Mejoramiento de la técnica:

12f : 2f = 6

Dibujar 12 f y agruparlas de 2 en 2

↓

Sumar de 2 en 2

↓

Sumas de sumas

↓

Dividir (pocos)

12 f : 2

6

2 f → 10 e

12 f → x

6

10e X 6 = 60e

Formar 6 grupos de 10 y contar

↓

Sumar 6 veces 10e

↓

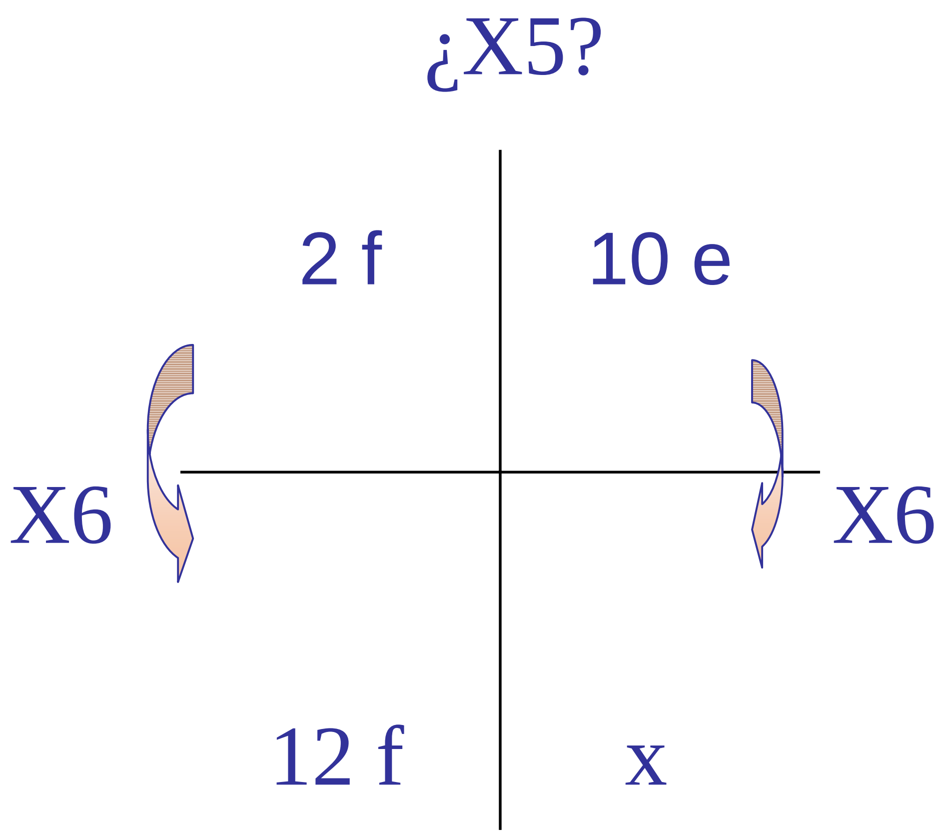
Sumas de sumas

↓

Multiplicar

10 e X 6

- La multiplicación interviene en tanto factor "interno".



Dos nociones más complejas:

- La equivalencia de razones: $2 \rightarrow 6 = 1 \rightarrow 3$
- La identificación de los operadores *externos* : $2 \rightarrow 6 = \times 3$

- **La equivalencia de razones: 2→6 = 1→3**

La constatan, pero no la explican, y muy pocos la anticipan.

Las situaciones sobre equivalencia (identificar reglas equivalentes; crear reglas equivalentes) fueron **difíciles**.

- **Los operadores “externos” constantes**

  A) *Se cambia cada ficha por 4 estampas*

  1 → 4 = X4

  B) *Se cambian cada 2 fichas por 6 estampas*

  2 → 6 = X3

  C) *Se cambian cada 4 fichas por 8 estampas*

  4 → 8 = X2

  D) *Se cambian cada 8 fichas por 24 estampas*

  8 → 24 = X3

- Facilitan significativamente las tareas
- La equivalencia se vuelve transparente

Los alumnos **no los identificaron** para comparar las reglas. Pocas veces **los usaron implícitamente.**

Comentarios

1. Desde tercer grado, en el contexto de los intercambios de objetos, los alumnos pueden:

   - Desechar criterios centrados en una variable, para comparar reglas de cambio (razones).

- Poner en marcha un procedimiento para comparar reglas (aplicarlas a una misma cantidad de estampas).
- Mejorar la eficiencia de este procedimiento al utilizar la multiplicación **como factor interno**, en sustitución de las sumas repetidas

Con dos beneficios: enriquecimiento de la multiplicación, desarrollo de la noción de razón

2. Las nociones de “**reglas equivalentes**” y de **operador externo** constante, se manifiestan como nociones conceptualmente más complejas, vinculadas entre sí.

3. Es probable que en los grados (4°, 5°) siguientes los alumnos logren avances más visibles.